クライン群の強収束性と力学系的収束 (複素力学系の研究 : 現状と展望)

谷口, 雅彦

数理解析研究所講究録
1087巻 1999年 57-66

クライン群の強収束性と力学系的収束

谷口雅彦 (京大理)

1 表現空間での連続性

リーマン球面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上に作用するクライン群 Γ は、一方では3次元完備双曲 orbifold $M=\mathbf{H}^3/\Gamma$ の基本群であるが、他方で $\hat{\mathbf{C}}$ 上の共形力学系を与えている。以下、簡単のためクライン群は特に断らない限り torsion-free かつ非初等的であるとする。

まず表現空間での収束として、次の代数的収束がある。

定義 Γ_n が Γ に代数的収束するとは id に各点収束する同型 $\chi_n:\Gamma\to\Gamma_n$ の列が存在することである。

一方、力学系としての収束性は様々なレベルで定式化できるが、位相的には次の「カオス部分の連続性」がある。

定義 極限集合 $\Lambda_n=\Lambda(\Gamma_n)$ が $\Lambda=\Lambda(\Gamma)$ に収束するとは、$\hat{\mathbf{C}}$ 上の Hausdorff 位相で Λ_n が Λ に収束することである。

クライン群自身もまた $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ の閉集合であるから、次のような収束も自然に考えられる。

定義 Γ_n が Γ に幾何学的収束するとは $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ での Hausdorff 位相で Γ_n が Γ に収束することである。

このとき次の事実は基本的である。「6」の7章を参照せよ。

定理 1.1 (「6」**Theorem 7.38**) Γ_n が Γ に代数的収束し、Λ が $\hat{\mathbf{C}}$ でない場合に、Λ_n が Λ に収束すれば、Γ_n が Γ に幾何学的収束する。

従って、力学系的な収束を議論するとき、幾何学的収束を仮定することは自然である。これが McMullen の議論の出発点であるが、次の結果が鍵を握る。

命題 1.2 （「6」**Lemma 7.33**）Γ_n が Γ に幾何学的に収束し、$M_n = \mathbf{H}^3/\Gamma_n$ の単射半径が、凸核 $K(M_n)$ 上一様に有界であるとする。このとき、Λ_n は Λ に収束する。

ここで、M の凸核 (convex core) $K(M)$ とは、極限集合に内に両端点を持つすべての測地線を含む最小の凸集合の M への射影である。

注意 本ノートでは、Γ が非初等的であることを仮定した。この仮定は必要である。

一方、Thurston 以来、代数的収束する列がいつ幾何学的にも収束するかということが問題となり、大鹿氏をはじめ、多くの研究者が今も研究を続けている。最新の結果としては次の定理がある。

定義 代数的かつ幾何学的に収束するとき、狭義強収束すると言う。

命題 1.3 （「1」）Γ_n が型を保ち、有限生成の Γ に代数的に収束するとする。

1. $\Lambda \neq \hat{\mathbf{C}}$ なら、Λ_n は Λ に収束し Γ_n は Γ に狭義強収束する。
2. $\Lambda = \hat{\mathbf{C}}$ なら、さらに Γ が面群や巡回群のいくつかの自由積でないと仮定すると、Λ_n は Λ に収束し Γ_n は Γ に狭義強収束する。

定義 M あるいは Γ が幾何学的有限であるとは凸核 $K(M)$ と M の thick part との共通部分がコンパクトであることである。

命題 1.4 （「6」**Theorem 7.45**）Γ_n が幾何学的有限な Γ に狭義強収束するとき、Λ_n は Λ に収束する。

2　McMullen の強収束

McMullen の独創の一つは、クライン群の表現空間からの束縛をひとまず捨象したことにある。

定義 Γ_n が Γ に強収束するとは、Γ_n が Γ に幾何学的収束し、かつ id に各点収束する全射準同型 $\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$ の列が存在することとする。

狭義強収束すれば、当然強収束する。また Γ が有限生成なら、上定義の χ_n は十分大きい任意の n に対し一意的に定まる。

一般に Γ_n から Γ への準同型が自然な形で定義できるとは限らない。一方 Γ_n が有限生成な Γ に幾何学的に収束すれば id に各点収束する準同型

$$\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$$

は常に構成できる（「6」Proposition 7.13 ）。従って、次の定理が得られる。

定理 2. 1 (Jorgensen-Marden) Γ_n が 幾何学的極限 Γ_G と代数的極限 $\Gamma_A \subset \Gamma_G$ を持ち、Γ_G が有限生成とする。このとき Γ_n は Γ_G に強収束する。

このような状況で、McMullen「7」は以下の定理を示した。

定理 2. 2 幾何学的有限な Γ に Γ_n が強収束するとき、

1. M_n は十分大きい任意の n に対し幾何学的有限で
2. Λ_n は Λ に収束する。
3. 任意の $\epsilon > 0$ に対し、切りつめられた凸核 $K_\epsilon(M_n)$ は $K_\epsilon(M)$ に強収束する。

再び表現空間に戻ると、

定理 2. 3 (強収束の判定) 幾何学的有限な Γ に Γ_n が代数的に収束するとする。

このとき Γ_n が Γ に強収束するのは、任意のカスプ部分群 $L \subset \Gamma$ に対し、対応する $L_n = \chi_n(L) \subset \Gamma_n$ が L に幾何学的に収束することと同値である。

ここで、$L \subset \Gamma$ がカスプ部分群とは極大放物部分群のことである。

従って、Γ が純斜航的で幾何学的有限（すなわち convex cocompact ）なら代数的収束は狭義強収束を意味する。特に、次の結果が得られる。

系 1 純斜航的で幾何学的有限な Γ に Γ_n が代数的収束するとき、Γ_n は Γ に強収束する。

従って「6」Corollary 7.34 は次のように改正できる。

系 2 純斜航的で幾何学的有限な Γ に Γ_n が代数的収束するとき、Λ_n は Λ に収束する。

注意 なお、「6」Corollary 7.34 は仮定が不十分で、そのままでは反例がある。

3　量的な連続性

力学系としての連続性の次のレベルは量的な収束である。それは様々な基本量により測られる。代表的なものを列挙しておく。

定義

1. $\lambda_0(M)$：ラプラシアンのスペクトラム底

$$\begin{aligned}\lambda_0(M) &= \inf\left\{\frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M |f|^2} \mid f \in C_0^\infty(M)\right\} \\ &= \sup\{\lambda \geq 0 \mid f > 0; \Delta f = \lambda f \text{ がある}\}\end{aligned}$$

（たとえば $\lambda_0(\mathbf{H}^3) = 1$ である。また実際 λ_0 に対する正値固有函数が存在する。従って、sup は max である。）

2. $\delta(\Gamma)$：ポアンカレ級数の収束指数

ポアンカレ級数

$$P_s(\Gamma, x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma x)} \qquad (x \in \mathbf{H}^3)$$

（$x \in \Omega$ なら球面計量を用いて $P_s(\Gamma, x) = \sum |\gamma'(x)|^s$ ）に対し、

$$\delta(\Gamma) = \inf\{s \geq 0 \mid P_s(\Gamma, x) < \infty\}$$

（これは x の取り方に依らない）

3. $\alpha(\Gamma)$：臨界次元（Γ-不変密度の最小次元）

ここで、次元 α の Γ-不変等角密度とは、S^2_∞ 上の正測度 μ で、任意の Borel 集合 E と γ に対し、

$$\mu(\gamma E) = \int_E |\gamma'|^\alpha d\mu$$

を満たすもので、全測度 1 に正規化されているとする。

4. $\dim(\Gamma)$：極限集合の Hausdorff 次元

5. $\dim(\Gamma_c)$：非接極限集合の Hausdorff 次元

特に基本的表象として議論されるものは、$\dim(\Gamma)$ であるが、次のような半連続性を持っている。

命題 3.1（「2」）有限生成の Γ_n が Γ に代数的収束するとき、

$$\dim(\Lambda) \leq \liminf_{n\to\infty} \dim(\Lambda_n).$$

また、以上のいくつかの基本量の関係として、以下の結果が基本的である。

定理 3.2 任意の（非初等的な）Γ に対し、

$$\dim(\Lambda_c) = \delta(\Gamma) = \alpha(\Gamma)$$

かつ

$$\begin{aligned} \lambda_0(M) &= 1 & (\delta(\Gamma)) \leq 1) \\ &= \delta(\Gamma)(2-\delta(\Gamma)) & (\delta(\Gamma) > 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。

定理 3.3 (Sullivan) 幾何学的有限な Γ に対し、

$$\dim(\Lambda_c) = \dim(\Lambda)$$

が成り立つ。

さらに、$\hat{\mathbf{C}}$ 上に次元 $\delta(\Gamma)$ で全測度 1 の Γ-不変密度 μ が一意的に存在する。いわゆる *Patterson-Sullivan* の標準密度である。μ は *atom* を持たず Λ を台に持つ。またポアンカレ級数は収束指数で発散する。

系 3 幾何学的有限な M に対し、$\Lambda \neq \hat{\mathbf{C}}$ なら、$\dim(\Lambda) < 2$ が成り立つ。

系 4 純斜航的で幾何学的有限な群の極限集合上の正規化された Γ-不変密度は一意的である。

定理 3.4（「7」）幾何学的無限かつ素直な M に対し、

$$\dim(\Lambda_c) = \dim(\Lambda) = 2$$

が成り立つ。

命題 3. 5 (「2」) 解析的有限で幾何学的無限な Γ に対し、

$$\dim(\Lambda) = 2$$

が成り立つ。

さらに、解析的有限で第二種な Γ に対し、幾何学的有限であることと $\dim(\Lambda) < 2$ であることは同値である。

注意 このようにクライン群に関しては、幾何学的有限性と極限集合のハウスドルフ次元が極めて良好な関係を示す。更に「3」を見よ。

一方、Collet-Eckman 写像などのように、有理函数の反復合成では両者の乖離が生じる。

強収束でも極限集合のハウスドルフ次元が収束しない例はたとえば Jorgensen の例から作れる。まず、

$$\Gamma_t = \langle \gamma_t(z) = e^{-2\pi i t} z + 1 \rangle$$

とおく。ただし $t = 0$ か $t \in \mathbf{H}$ とする。

ここで、

定義 上半平面 $\mathbf{H}$ の点列 $\{t_n = iL_n + \theta_n\}$ で 0 に収束するものに対し、t_n が非接的に 0 に収束するとは

$$|\theta_n|/L_n < M$$

となる $M > 0$ が存在することで、円接的に (horocyclic に) 収束するとは

$$\theta_n^2/L_n \to 0$$

となることである。

命題 3. 6 Γ_t が Γ に強収束するのは、t が 0 に円接的に収束することと同値である。

さらに、t が 0 にある *horocycle* に沿って収束するときは、部分列で、*rank* 2 の放物群 $\Gamma' \supset \Gamma_0$ に幾何学的に収束するものが存在する。

例 3. 1 $R > 4$ として

$$G_0 = \langle z \mapsto z/(Rz + 1), z \mapsto z + 1 \rangle$$

とおく。このとき、$\delta(G_0) < 1$ で、$R \to \infty$ のとき連続に 1/2 に収束することが分かるので、任意の $\epsilon \in (0, 1/2)$ に対し $\delta(G_0) = 1/2 + \epsilon$ を満たす $R > 4$ が存在する。

さて、

$$G_t = \langle z \mapsto z/(Rz+1), z \mapsto e^{-2\pi it} z + 1 \rangle$$

とすると、命題 *3.6* から G_t が G_0 に強収束するのは、t が 0 に円接的に収束することと同値である。従って、次の命題と定理 *4.2* より、$t_n \in \mathbf{H}$ なる点列で、 G_t は G_0 に強収束するが、

$$\lim_n \delta(G_{t_n}) = 1 > \delta(G_0)$$

が成り立つものが存在することが分かる。

命題 3.7 任意の十分小さい $t = 0$ での *horocycle* は $\delta(G_t) > 1$ となる点 t を含む。

この証明の証明では、次の事実が重要である。

系 5 Γ が *rank* r のカスプを持てば、 $\delta(\Gamma) > r/2$ である。

注意 1 から $1/2 + \epsilon$ へのジャンプは本質的に最良である。実際、G_0 が幾何学的有限で、 G_n が G_0 に強収束するとき、$\lim_n \delta(G_n) > 1$ ならば定理 4.2 より $\lim_n \delta(G_{t_n}) = \delta(G_0)$ である。また、$\delta(G_0) \leq 1/2$ なら G_0 は純斜航的で幾何学的有限だから、やはり連続性を得る。

また、「4」と比較せよ。

4 力学系的収束

以上から、力学系的収束の一つの定式化が得られる。

定義 Γ_n が Γ に力学系的に収束するとは

1. Γ_n が Γ に強収束し、
2. Λ_n が Λ に収束し、
3. $\dim(\Lambda_n) \to \dim(\Lambda)$
4. $\delta(\Lambda_n) \to \delta(\Lambda)$

5. Γ と十分大きい任意の n に対する Γ_n が幾何学的有限で、

6. Γ_n に対する標準密度 μ_n が、Γ に対する標準密度 μ に弱収束する

ことである。

注意 Γ が幾何学的有限で条件 (1), (6) が満たされれば、Γ_n は力学系的に収束する。

定理 4.1 純斜航的で幾何学的有限な Γ に Γ_n が代数的に収束すれば、力学的にも収束する。

これは、有理函数の反復合成における安定性定理に対応していて、基本定理と呼んでよいが、さらに以下の McMullen 「7」の主要定理が成り立つ。

定理 4.2 (力学系的収束条件) 幾何学的有限な Γ に Γ_n が強収束し、

$$\liminf_n \delta(\Gamma_n) > 1$$

ならば、力学的にも収束する。

最後に再び表現空間に戻るとき、前記の例におけるような現象を排除する必要がある。そこで、次のような条件を考える。

定義 双曲変換 $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$ の複素的長さを

$$\mathcal{L}(g) = L + i\theta = \log\lambda$$

で定義する。ただし、λ は g の multiplier である。また、λ が 1 に近い時は、θ は 0 のちかくに選ぶこととする。

Γ_n が Γ に代数的に収束する、すなわち、同型 $\chi_n : \Gamma \to \Gamma_n$ が id に各点収束するとき、放物元 $g \in \Gamma$ が偶発的放物元 (accidental parabolics) であるとは、無限個の n に対し、$g_n = \chi_n(g)$ が双曲元であることとする。従って特に $i\mathcal{L}(g_n) \to 0$ だが、この収束がすべて非接的あるいは円接的のとき、「すべての偶発的放物元が非接的あるいは円接的に収束する」という。

このとき、強収束については次のような判定条件が得られる。

定理 4. 3 (円接条件) 幾何学的有限な Γ に Γ_n が代数的に収束するとする。

このとき Γ_n が Γ に強収束するのは、任意の偶発的放物元が円接的に収束することと同値である。

注意 Γ が幾何学的有限な場合に $\dim(\Lambda) > 1$ ならさらに、Γ_n に対する標準密度 μ_n は Γ に対する標準密度 μ に弱収束することも分かる。

一方、$\dim(\Lambda) = 1$ となるのは、Λ が全不連結であるか、円であるときに限ることが知られている(「2」)。

定理 4. 4 (非接条件) 幾何学的有限な Γ に Γ_n が代数的に収束し、すべての偶発的放物元が非接的に収束するならば、力学的にも収束する。

系 6 有限生成フックス群 Γ に Γ_n が代数的に収束すれば、

$$\lim_n \dim(\Lambda_n) = \dim(\Lambda)$$

が成り立つ。

系 7 (収束定理) Γ_n が Γ に強収束し、M は素直とする。このとき

$$\lim_n \lambda_0(M_n) = \lambda_0(M)$$

が成り立つ。従って、さらに $\dim(\Lambda) \geq 1$ なら

$$\lim_n \dim(\Lambda_n) = \dim(\Lambda)$$

である。

この前半の主張は狭義強収束の場合に Canary-Taylor が、より幾何学的な証明を与えている。

注意 本ノートの話題については、さらに松崎氏による明解な解説「5」を参照せよ。

参考文献

[1] J. Anderson and R. Canary, *Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits sets of Kleinian groups II* preprint.

[2] C.J. Bishop and P.W. Jones, *Hausdorff dimension and Kleinian groups,* Acta Math. **179**, (1997), 1-39.

[3] R.D. Canary, Y. Minsky and E. Taylor, *Spectral theory, Hausdorff dimension and the topology of hyperbolic 3-manifolds,* preprint.

[4] A. Douady, P. Sentenac and M. Zinsmeister, *Implosion parabolique et dimension de Hausdorff,* preprint.

[5] 松崎克彦, クライン群の力学系–極限集合のハウスドルフ次元–,「数学」掲載予定.

[6] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinain Groups,* Oxford Univ. Press, 1998.

[7] C. McMullen, *Hausdorff dimension and conformal dynamics I: Strong convergence of Kleinian groups,* preprint.

[8] E. Taylor, *Geometric finiteness and the convergence of Kleinian groups,* Comm. Anal. Geom. **5**, (1997), 497-533.